SEMESTRAL

UNI

academiacesarvallejo.edu.pe

ACADEMIA
CÉSAR
VALLEJO

ACADEMIA
CÉSAR
VALLEJO

ACADEMIA
CÉSAR
VALLEJO

ACADEMIA
CÉSAR
VALLEJO

SEMESTRAL

UNI

academiacesarvallejo.edu.pe





Álgebra

Tema: Valor absoluto I

Docente: Phflucker H. Coz

VALOR ABSOLUTO

El valor absoluto de un número real x denotado por $|x|$ se define de la siguiente manera

$$|x| = \begin{cases} x & ; x > 0 \\ 0 & ; x = 0 \\ -x & ; x < 0 \end{cases}$$

Ejemplos

- $|15| = 15$
- $|-8| = -(-8) = 8$
- $|0| = 0$
- $|-\sqrt{2}| = -(-\sqrt{2}) = \sqrt{2}$

$|\underbrace{x}_{\text{positivo}}| = x$ En forma práctica, las barras se eliminan.

$|\underbrace{x}_{\text{negativo}}| = -x$ En forma práctica, le cambiamos de signo.

- $|\underbrace{x^2 + \pi}_{\text{siempre positivo}}| = x^2 + \pi$

Como $x^2 \geq 0$; $\forall\, x \in \mathbb{R}$
$\rightarrow x^2 + \pi \geq \pi$

- $|\underbrace{4^x + 1}_{\text{siempre es (+)}}| = 4^x + 1$

Como $4^x > 0$
$\rightarrow 4^x + 1 > 1$

- $|\underbrace{|x| + 5}_{\text{siempre positivo}}| = |x| + 5$

Como $|x| \geq 0$; $\forall\, x \in \mathbb{R}$
$\rightarrow |x| + 5 \geq 5$

- $|\underbrace{3x^2 - x + 1}_{\text{siempre positivo}}| = 3x^2 - x + 1$

Por el Teorema del trinomio Positivo:

- Coef. princ. $= 3 > 0$
- $\Delta = (-1)^2 - 4(3)(1)$

$\Delta = -11 < 0$

PROPIEDADES DE VALOR ABSOLUTO

Considere que cada expresión este bien definida en los reales.

1. $\lvert x\rvert \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$	**2.** $\lvert xy\rvert = \lvert x\rvert\lvert y\rvert$	**3.** $\lvert -x\rvert = \lvert x\rvert$
• $\lvert 3x-2\rvert \geq 0 ;\ \forall x \in \mathbb{R}$ • $\lvert x^3+x\rvert \geq 0 ;\ \forall x \in \mathbb{R}$	• $\lvert 8x\rvert = \lvert 8\rvert\lvert x\rvert = 8\lvert x\rvert$ • $\lvert x^2-2x\rvert = \lvert x\rvert\lvert x-2\rvert$ $\lvert x(x-2)\rvert$	• $\lvert -10\rvert = \lvert 10\rvert = 10$ • $\lvert 4-x\rvert = \lvert -(x-4)\rvert$ $= \lvert x-4\rvert$
4. $\left\lvert \frac{x}{y}\right\rvert = \frac{\lvert x\rvert}{\lvert y\rvert} ;\ y \neq 0$	**5.** $\lvert x\rvert^2 = \lvert x^2\rvert = x^2$	**6.** $\sqrt{x^2} = \lvert x\rvert$
$\left\lvert \frac{x+6}{x-2}\right\rvert = \frac{\lvert x+6\rvert}{\lvert x-2\rvert}$ $\frac{\lvert x\rvert}{\lvert x+3\rvert} = \left\lvert \frac{x}{x+3}\right\rvert$	$\lvert x-5\rvert^2 = (x-5)^2$ $(x+9)^2 = \lvert x+9\rvert^2$	$\sqrt{(x-3)^2} = \lvert x-3\rvert$ $\sqrt{(-7)^2} = \lvert -7\rvert = 7$

Consecuencia :

$\lvert 4x-8\rvert = 4\lvert x-2\rvert$

$\lvert -5x-20\rvert = 5\lvert x+4\rvert$

$\lvert a-b\rvert = \lvert b-a\rvert$

$\sqrt[2n]{x^{2n}} = \lvert x\rvert \ ; \quad n \in \mathbb{N}$

• $\sqrt[4]{(x-3)^4} = \lvert x-3\rvert$

Aplicación 1

Si se cumple que

$$|x^2 - 2x + k| = x^2 - 2x + k\ ;\ \forall x \in \mathbb{R},$$

halle la variación de k.

A) $[1; +\infty\rangle$ B) $\langle 1; +\infty\rangle$ C) $[4; +\infty\rangle$
D) $\langle -\infty; 1]$ E) $\langle -\infty; 1\rangle$

Resolución

Recuerde: Si $|b| = b \Rightarrow b \geq 0$

$|x^2 - 2x + k| = x^2 - 2x + k\ ;\ \forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow 1x^2 - 2x + k \geq 0\ ;\ \forall x \in \mathbb{R}$

Recuerde:
Si $ax^2 + bx + c \geq 0\ ;\ \forall x \in \mathbb{R}$
$\Rightarrow a > 0 \wedge \Delta \leq 0$

$\therefore\ 1 > 0$ (es evidente) $\wedge\ \Delta \leq 0$

$(-2)^2 - 4(1)(k) \leq 0$

$4 - 4k \leq 0$

$1 - k \leq 0$

$1 \leq k$

Aplicación 2

Se define

$$f_{(x)}=\frac{|2x+3|-|x-4|}{x}, x\in\langle 0;1\rangle$$

halle la variación de $f_{(x)}$.

A) $[0;+\infty\rangle$ B) $\langle 2;+\infty\rangle$ C) $[4;+\infty\rangle$
D) $\langle -\infty;3]$ E) $\langle -\infty;2\rangle$

Resolución

Como $0<x<1$

resto 4: $-4<x-4<-3$

$\Rightarrow f(x)=\frac{(2x+3)-(-)(x-4)}{x}$

$f(x)=\frac{2x+3+x-4}{x}$

$f(x)=\frac{3x-1}{x}$; $0<x<1$

$f(x)=3-\frac{1}{x}$; $0<x<1$

por -1: $0>-x>-1$ negativos

invierto: $-\frac{1}{x}<-1$

sumo 3: $3-\frac{1}{x}<2$

ECUACIONES CON VALOR ABSOLUTO

Son ecuaciones donde la incógnita este afectado del valor absoluto.

Ejemplos:

- $|3x-2|=5$
- $|x-2|+|2x-4|=6$
- $|x^2+x-6|=|2x+4|$

Tenga en cuenta que:

Como $|x|\geq 0$ $\forall x\in\mathbb{R}$, entonces estas ecuaciones son incompatibles y tienen $C.S=\emptyset$

- $|3x+4|=-5$
- $|2x-1|+|x+3|=-6$

Resolución de ecuaciones con valor absoluto

Tener en cuenta la definición y propiedades del valor absoluto en el proceso de la resolución de la ecuación para dar el conjunto solución (CS).

Aplicación 3: Resuelva la ecuación

$$|3x-1|=8$$

Resolución:

Recuerde: $|-5|=5$; $|5|=5$

$\Rightarrow |n|=5 \Rightarrow n=5 \vee n=-5$

En el problema $|3x-1|=8$ (constante)

$\Rightarrow 3x-1=8 \vee 3x-1=-8$

$x=3 \vee x=-\frac{7}{3}$

Teoremas

1. $|x| = a \leftrightarrow a \geq 0 \wedge (x = a \vee x = -a)$

2. $|x| = |a| \leftrightarrow x = a \vee x = -a$

Aplicación 4: Resuelva la ecuación

$$|x+1| = 3x - 9$$

Resolución:

$3x-9 \geq 0 \wedge (x+1 = 3x-9 \vee x+1 = -3x+9)$

te olvidas

$x = 5$ $\quad$ $x = 2$

Reemplazando en "$3x-9$"

$x = 5$: $3(5)-9$ ✓ (+)

$x = 2$: $3(2)-9$ ✗ (−)

$C.S. = \{5\}$

Aplicación 5: Resuelva la ecuación

$$|x^2 + x - 6| = |2x - 4|$$

Resolución:

$x^2 + x - 6 = 2x - 4 \vee x^2 + x - 6 = -2x + 4$

$x^2 - x - 2 = 0 \vee x^2 + 3x - 10 = 0$

$x \quad -2$ $\qquad$ $x \quad 5$

$x \quad 1$ $\qquad$ $x \quad -2$

$x = 2 \vee x = -1 \vee x = -5 \vee x = 2$

$C.S. = \{2; -1; -5\}$

Aplicación 6

Determine la suma de módulos de las soluciones de la siguiente ecuación

$$x^2 + 6x - 9|x + 3| + 29 = 0.$$

A) 16 B) 18 C) 20 D) 25 E) 12

Resolución

$x^2+6x+9-9|x+3|+29-9=0$

$(x+3)^2-9|x+3|+20=0$

$|x+3|^2-9|x+3|+20=0$

$|x+3| \quad -5$

$|x+3| \quad -4$

$|x+3|=5 \quad \vee \quad |x+3|=4$

$x+3=5 \vee x+3=-5 \qquad x+3=4 \vee x+3=-4$

$x=2 \vee x=-8 \qquad x=1 \vee x=-7$

$C.S.=\{2;-8;1;-7\}$

Rta: $|2|+|-8|+|1|+|-7|$ → 2, 8, 1, 7



GRACIAS

SÍGUENOS:

academiacesarvallejo.edu.pe